Logika relacyjna a formalna analiza pojęć

Joanna Golińska-Pilarek

Seminarium Profesora J. Pelca
Język naturalny - wybrane zagadnienia z zakresu filozofii oraz logiki ogólnej
Instytut Filozofii UW

Warszawa
14 grudnia 2007

Prolog

Kłopot z wielkimi filozofami w tym, że każdy wielki filozof zawsze definiuje wszystko według własnego widzimisię.
(S. Themerson)

Plan referatu

- Motywacje formalnej analizy pojęć, podstawowe definicje i własności
- Krótka przerwa
- Logika dla formalnej analizy pojęć - wnioskowanie i weryfikacja własności

  J. Golińska-Pilarek, E. Orłowska, *Relational Reasoning in Formal Concept Analysis*

FORMALNA ANALIZA POJĘĆ

Formalna analiza pojęć - ang. *Formal Concept Analysis* - FCA:

- Próba matematyzacji pojęcia **POJĘCIE**
- Formalne narzędzie stosowane do analizy danych i reprezentacji wiedzy
- Znajduje szerokie zastosowania w wielu bardzo różnych dziedzinach: psychologii, socjologii, antropologii, medycynie, biologii, lingwistyce, informatyce, matematyce oraz inżynierii przetwarzania informacji.

Co mamy na myśli mówiąc, że ,,coś” jest pojęciem?

Oczywiście:

różni ludzie używają tego samego wyrażenia w różnych kontekstach.

Czy mają na myśli to samo pojęcie?

Jak rozumieć powyższe pytanie?

Co to w ogóle jest **POJĘCIE**?

Definicja słownikowa

Co to jest **POJĘCIE**?

- podstawowy składnik myśli
- abstrakcyjno-myślowe całościowe odzwierciedlenie istotnych cech przedmiotów czy zjawisk
- myślowy odpowiednik nazwy

Z każdym pojęciem związane są jego EKSTENSJA i INTENSJA.

EKSTENSJA - to klasa przedmiotów (obiektów) opisywanych przez pojęcie

INTENSJA - to klasa cech (własności, atrybutów) wspólnych dla wszystkich przedmiotów z ekstensji

Bertrand Russell:

Zastanówmy się, na przykład, nad pojęciem takim jak **sprawiedliwość**. *Jeśli zadamy sobie pytanie, czym ona jest, to zazwyczaj rozważymy ten, tamten i inny jeszcze czyn sprawiedliwy, w celu ustalenia, co mają one ze sobą wspólnego. Każdy z nich musi, w pewnym sensie, uczestniczyć we wspólnej istocie, którą znajdziemy we wszystkim, co sprawiedliwe i w niczym innym. Tą wspólną istotą, na mocy której wszystkie one są sprawiedliwe, będzie sama sprawiedliwość, czysta esencja, której domieszka do faktów życia codziennego wytwarza całą rozmaitość czynów sprawiedliwych.*

KONTEKST FORMALNY

Jak formalnie opisywać wszystkie te elementarne sytuacje językowe, w których pojawia się tak proste wyrażenie postaci:

przedmiot/obiekt posiada cechę/atrybut?

Propozycja w ramach FCA:

- kluczowe terminy takiego opisu to: obiekt, atrybut, relacja incydencji
- pierwszy krok: zdefiniowanie **KONTEKSTU FORMALNEGO** w terminach obiektu, atrybutu i relacji incydencji
- drugi krok: zdefiniowanie **POJĘCIA FORMALNEGO** dla danego kontekstu formalnego.

Kontekst formalny

KONTEKST FORMALNY: struktura $\mathcal{K} = (G, M, I)$

- G - niepusty zbiór **obiektów**;
- M - niepusty zbiór **atrybutów**;
- $I \subseteq G \times M$ - binarna relacja między obiektami a atrybutami.

gIm - obiekt g **posiada** atrybut m; atrybut m można przypisać do obiektu g.

Co reprezentuje kontekst formalny?

Kontekst formalny to matematyczny model

,,rzeczywistej sytuacji"

opisanej za pomocą tablicy zawierającej:

- nazwy obiektów;
- nazwy atrybutów;
- informację o zależnościach pomiędzy obiektami a atrybutami.

Formalny kontekst SŁAWNE ZWIERZĘTA

	fikcyjne	realne	żółw	pies	kot	ssak
Garfield	×				×	×
Franklin	×		×			
Scooby Doo	×			×		×
Flash		×		×		×
Socks		×			×	×
Tinkerbell		×		×		×
Buś		×			×	×

Jakie dodatkowe zależności można wywnioskować z kontekstu formalnego?

Dowolny podzbiór obiektów A generuje zbiór atrybutów, które można przypisać wszystkim obiektom z A:

- $A = \{\text{Flash}, \text{Socks}, \text{Tinkerbell}, \text{Buś}\} \longrightarrow A' = \{\text{realne}, \text{ssak}\}$
- $A = \{\text{Scooby Doo}, \text{Flash}\} \longrightarrow A' = \{\text{pies}, \text{ssak}\}$
- $A = \{\text{Garfield}, \text{Buś}\} \longrightarrow A' = \{\text{kot}, \text{ssak}\}$

Dowolny podzbiór atrybutów B generuje zbiór obiektów posiadających wszystkie atrybuty z B:

- $B = \{\text{realne}, \text{ssak}\} \longrightarrow B' = \{\text{Flash}, \text{Socks}, \text{Tinkerbell}, \text{Buś}\}$
- $B = \{\text{pies}\} \longrightarrow B' = \{\text{Scooby Doo}, \text{Flash}, \text{Tinkerbell}\}$
- $B = \{\text{kot}, \text{ssak}\} \longrightarrow B' = \{\text{Garfield}, \text{Socks}, \text{Buś}\}$

Jakie zależności mogą zachodzić między zbiorami: A i A' oraz B i B'?

{Scooby Doo, Flash} nie jest domknięty względem {pies, ssak}

{pies} nie jest domknięty względem {Scooby Doo, Flash, Tinkerbell}

ALE

{Flash, Socks, Tinkerbell, Buś} jest domknięty względem {realne, ssak}

{kot, ssak} jest domknięty względem {Garfield, Socks, Buś}

Pojęcie formalne

Niech $\mathcal{K} = (G, M, I)$ będzie formalnym kontekstem, A dowolnym podzbiorem obiektów, zaś B dowolnym podzbiorem atrybutów.

Para uporządkowana (A, B) jest **POJĘCIEM FORMALNYM** kontekstu $\mathcal{K}$, gdy:

- $A = B' = \{g \in G : \forall m \in B\; gIm\}$ **EKSTENSJA** (A, B)
- $B = A' = \{m \in M : \forall g \in A\; gIm\}$ **INTENSJA** (A, B)

Inaczej:

(A, B) jest pojęciem $\mathcal{K}$, gdy A i B są względem siebie domknięte.

Przykład: kontekst SŁAWNE ZWIERZĘ

Pojęciami formalnymi są:

- $(\{\text{Franklin}\}, \{\text{fikcyjne}, \text{żółw}\})$
- $(\{\text{Garfield}, \text{Scooby Doo}\}, \{\text{fikcyjne}, \text{ssak}\})$
- $(\{\text{Flash}, \text{Socks}, \text{Tinkerbell}, \text{Buś}\}, \{\text{realne}, \text{ssak}\})$

W każdej parze pierwszy zbiór jest ekstensją pojęcia, zaś drugi zbiór jego intensją.

Własności

Niech $\mathcal{K} = (G, M, I)$ będzie kontekstem formalnym. Wówczas:

- Jeśli (A, B) jest pojęciem $\mathcal{K}$, to $A'' = A$ i $B'' = B$.
- Pojęcia kontekstu $\mathcal{K}$ są uporządkowane względem relacji:

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \stackrel{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} A_1 \subseteq A_2 [\Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1]$$

- Zbiór wszystkich pojęć kontekstu $\mathcal{K}$ wraz z relacją $\leq$ tworzy kratę.
- Jeśli $P, C \subseteq M$, to **implikacja** $P \Rightarrow C$ zachodzi w $\mathcal{K}$, gdy każdy obiekt $g \in G$ spełnia warunek:

g ma wszystkie atrybuty z P $\rightarrow$ g ma wszystkie atrybuty z C.

Przykłady: kontekst SŁAWNE ZWIERZĘ

Podpojęcia

$(\{\text{Franklin}\}, \{\text{fikcyjne}, \text{żółw}\}) \leq$
$(\{\text{Garfield}, \text{Franklin}, \text{Scooby Doo}\}, \{\text{fikcyjne}\})$

$(\{\text{Garfield}\}, \{\text{fikcyjne}, \text{kot}, \text{ssak}\}) \leq$
$(\{\text{Garfield}, \text{Scooby Doo}, \text{Buś}\}, \{\text{kot}, \text{ssak}\})$

Implikacje

$\{\text{żółw}\} \Rightarrow \{\text{fikcyjne}\}$

$\{\text{realne}\} \Rightarrow \{\text{ssak}\}$

Przykład ,,zastosowania”

Reprezentacja pojęciowej struktury prostych sytuacji uczenia się, np. gdy syn uczy się czegoś od swego ojca

- wiedza ojca: kontekst $\mathcal{U}$
- aktualna wiedza syna: kontekst $\mathcal{K}$ taki, że:
  - obiekty $\mathcal{K}$ są również obiektami $\mathcal{U}$
  - atrybuty $\mathcal{K}$ są również atrybutami $\mathcal{U}$
  - jeśli obiekt ma pewną własność w $\mathcal{K}$, to ma również tę własność w $\mathcal{U}$

A zatem zakładamy, że syn nie popełnia błędów w nauce (ze względu na wiedzę ojca).

Przykład reprezentacji wiedzy

- aktualna wiedza syna: kontekst **SŁAWNE ZWIERZĘ**
- wiedza ojca: kontekst $\mathcal{U}$

Syn jest bardzo inteligentny. Stwierdza, iż w jego kontekście zachodzi następująca implikacja:

$$\{\text{żółw}\} \Rightarrow \{\text{fikcyjne}\}$$

Syn jest również dociekliwy. Pyta więc ojca, czy ta implikacja zachodzi również w kontekście $\mathcal{U}$.

Ojciec mówi ,,Nie" i daje kontrprzykład ,,Harriett".

Nową wiedzę syna będzie wówczas reprezentować kontekst $\mathcal{K}'$, w którym implikacja powyższa nie jest prawdziwa.

Kontekst $\mathcal{K}'$ - „nowy” kontekst SŁAWNE ZWIERZĘTA

	fikcyjne	realne	żółw	pies	kot	ssak
Garfield	$\times$				$\times$	$\times$
Franklin	$\times$		$\times$			
Scooby Doo	$\times$			$\times$		$\times$
Flash		$\times$		$\times$		$\times$
Socks		$\times$			$\times$	$\times$
Tinkerbell		$\times$		$\times$		$\times$
Buś		$\times$			$\times$	$\times$
Harriet		$\times$	$\times$			

W kontekście tym nie jest również prawdziwa implikacja:

$$\{\text{realne}\} \Rightarrow \{\text{ssak}\}$$

Podsumowanie

FCA można traktować jako matematyczną formalizację

,,klasycznej teorii pojęć"

Leibniz, Pascal, Peirce, Habermas, ...

Intencją FCA nie jest sformalizowanie (ludzkich) pojęć w ogóle czy poznawczych procesów w językach naturalnych!

FCA nie pretenduje do roli teorii filozoficznej.

FCA ma stanowić wsparcie dla ludzkiego myślenia, a nie jego mechanizację.

Wątpliwości

Nie-matematycy (w szczególności filozofowie i psycholodzy) mają prawo odrzucać definicje zaproponowane w ramach FCA jako ogólnie obowiązujące:

matematyczne formalizacje FCA zawsze i jedynie przybliżają nieformalne pojęcia nie-matematycznych dziedzin, **ALE ...**

zaletą tych formalizacji jest to, że poszukiwane terminy zdefiniowane są z absolutną precyzją, a stąd mogą być zaimplementowane w programach komputerowych.

Zastosowania FCA

- analiza i ocena różnego typu danych, i pojęciowych zależności między nimi
- zarządzanie, przeszukiwanie i uzyskiwanie wiedzy
- alternatywa dla metod statystycznych

Przykłady typu danych - konkretne zastosowania

- dane uzyskane w drodze wywiadu psychoanalitycznego - pojęciowa reprezentacja stanu psychicznego pacjentki anorektyczki
- dane sojologiczne - kontekst **NIEMIECKIE UNIWERSYTETY** i pojęciowa reprezentacja różnic pomiędzy studentami wschodniej i zachodniej części Niemiec
- słowa i zwroty z Roget's Thesaurus - analiza struktury pojęciowej słownika

Historia i rozwój

Początki: Rudolf Wille

- 1982 - *Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts*
- 1999 - *Formal Concept Analysis* (z B. Ganter)

Konferencje

International Conference on Formal Concept Analysis - od 2003 roku

Strona internetowa

`http://www.upriss.org.uk/fca/fca.html`

Prace o zastosowaniach

- sztuczna inteligencja - R. Davis (et. al.), *What is a knowledge representation?*, 1993
- kognitywistyka - P. Eklund (ed.), *Concept lattices*, 2004
- lingwistyka - U. Priss, *Linguistic Applications of Formal Concept Analysis*, 2005
- ekonomia - R. Wille, *Conceptual Knowledge Processing in the Field of Economics*, 2005
- socjologia - L. Freeman, D. White, *Using Galoise lattices to represent network data*, 1993
- psychologia - N. Spangenberg, K. E. Wolff, *Datenreduktion durch die Formale Begriffsanalyse von Repertory Grids*, 1993
- odkrywanie wiedzy i przeszukiwanie danych - P. Valtchev (ed.), *FCA for Knowledge Discovery and Data Mining*, 2004

Przykład z życia wzięty, choć nieformalnie opisany

Władysław Tatarkiewicz, *Zapiski do autobiografii:*

W mych latach szkolnych (...) jeździliśmy latem w góry lub nad morze. (...) Wyjazdy te zajmowały zazwyczaj połowę długich wakacji; na drugą połowę jechaliśmy na wieś: po upadku Bełżyc jeździliśmy do wujostwa do Krzywowoli w Chełmskie. Pobyty te mam bardzo dobrze w pamięci, a także pamiętam, jak podczas nich formowały mi się nowe pojęcia, jak się uczyłem nowych wyrazów i jak sam zaczynałem ich używać.

Przykład z życia wzięty, choć nieformalnie opisany

Dwór miejscowy był (to często bywało) rozbudowanym zborem ariańskim, sala sklepiona zboru służyła jako pokój gościnny i myśmy w niej mieszkali: wtedy weszła do mej świadomości nazwa ,,arianie" i przynajmniej ogólnikowe pojęcie a r i a n.

Na ganku siadywał wuj Domaszowski, z zielonym daszkiem przytwierdzonym do czoła przeciw blaskowi słońca, i czytał grubą francuską książkę. Gdyśmy bardzo hałasowali, przechodził z cichego czytania na głośne. Wiedziałem, że gruba książka jest o masonerii i wtedy nazwa ,,masoneria" wbiła się w mą świadomość: nazwa raczej niż pojęcie; to nastąpiło znacznie później.

Przykład z życia wzięty, choć nieformalnie opisany

Wuj był powstańcem sześćdziesiątego trzeciego roku, potem emigrantem w Paryżu przez kilkadziesiąt lat, lubił te lata wspominać - dumny, że na obczyźnie dawał sobie radę, zarabiając na życie jako kontroler omnibusów. Od tego czasu weszły do mej świadomości nazwy i pojęcia: p o w s t a ń c a, e m i g r a n t a i k o n t r o l e r a.

Przykład z życia wzięty, choć nieformalnie opisany

Do Krzywowoli często na dłuższe pobyty przyjeżdżał Aleksander Hempel, towarzysz wuja z powstania i przyjaciel. Gdy przyjechał, miał pokój w oficynie, wychodził z niego rzadko, nawet posiłki raczej przynoszono mu do pokoju: nie wypuszczał (byle jakiego) cygara z ust, a nie pozwalał otwierać w pokoju okien; całymi dniami grywał w winta z ,,trzema dziadami". Mówiono o nim - słusznie - że jest o r y g i n a ł e m i ten wyraz wszedł wtedy do mej świadomości, a wyobrażenie oryginała sprzęgło się z postacią starego Hempla.

Przykład z życia wzięty, choć nieformalnie opisany

Miałem już wtedy swoją funkcję, swój dziecięcy obowiązek: jeździć konno do Rejowca po pocztę. Tak weszła do mego życia nazwa i pojęcie o b o w i ą z k u.

W niedzielę przyjeżdżali na winta doktor Karpiński z Rejowca i sąsiad, pan Przanowski z Krasnego, ale na co dzień wuj nie miał partnerów; więc mię nauczył i grywaliśmy z ,,dwoma dziadami”. Nie bardzo miałem ochotę na te siedzące czynności, ale wytłumaczono mi, że to dla mnie zaszczyt. Odtąd wyraz i pojęcie z a s z c z y t u weszły do inwentarza mych wyrazów i pojęć.

Podstawowe zadania logiczne

- Weryfikacja ogólnych praw zachodzących we wszystkich kontekstach formalnych
- Weryfikacja ogólnych praw zachodzących w konkretnym kontekście formalnym
- Weryfikacja własności konkretnych obiektów w konkretnym kontekście formalnym

Propozycja

LOGIKA RELACYJNA

Dlaczego?

- W ramach logiki relacyjnej można wyrazić bardzo szeroką klasę logik nieklasycznych - wszystkie te logiki, które posiadają semantykę relacyjną (modalne, temporalne, informacyjne, ...)
- System dedukcyjny logiki relacyjnej może więc stanowić podstawę dla dedukcji w innych logikach: w konkretnym przypadku dodajemy reguły odzwierciedlające specyficzne cechy danej teorii
- system dedukcyjny logiki relacyjnej ma swoje implementacje:

  `http://www.logic.stfx.ca/reldt/`

Logika relacyjna $\mathrm{RL}_{\mathrm{FCA}}$

Język

- $x, y, z, \ldots$ - zmienne indywiduowe;
- $P_1, P_2, \ldots$ - binarne zmienne relacyjne;
- R, S - stałe relacyjne;
- $-, \cup, \cap, {}^{-1}, ;$ - operacje relacyjne.

Termy relacyjne i formuły

- Termy atomowe: P, gdzie P jest zmienną lub stałą relacyjną;
- Termy złożone: $-P$, $P \cup Q$, $P \cap Q$, P^{-1}, $P ; Q$;
- Formuły: xTy, gdzie x, y to zmienne indywiduowe, T to dowolny relacyjny term.

Logika relacyjna RL_{FCA} - semantyka

Model relacyjny $\mathcal{M} = (U, m)$ oparty na kontekście $\mathcal{K} = (G, M, I)$

- $U = G \cup M$ - niepuste uniwersum;
- $m(P) \subseteq U \times U$, dla dowolnej zmiennej relacyjnej P;
- $m(R) = I$, $m(S) = I^{-1}$;
- $m(-Q) = (U \times U) \setminus m(Q)$;
- $m(Q \cup T) = m(Q) \cup m(T)$;
- $m(Q \cap T) = m(Q) \cap m(T)$;
- $m(Q^{-1}) = m(Q)^{-1}$;
- $m(Q; T) = m(Q); m(T) =$

  $\{(x, y) \in U \times U : \exists z \in U((x, z) \in m(Q) \wedge (z, y) \in m(T))\}$.

Logika relacyjna RL_{FCA} - semantyka

Wartościowanie

Dowolna funkcja v przyporządkowująca zmiennym indywiduowym elementy z U.

- Spełnianie, $\mathcal{M}, v \models xTy$: $\quad (v(x), v(y)) \in m(T)$;
- Prawdziwość, $\mathcal{M} \models xTy$: $\quad$ spełnialność przez wszystkie wartościowania w $\mathcal{M}$;
- tautologia: formuła prawdziwa we wszystkich modelach.

Reprezentacja własności kontekstu formalnego

Własność: $A \subseteq A''$

P - zmienna relacyjna reprezentująca zbiór A

Term reprezentujący własność $A \subseteq A''$

$$-P \cup -(-R; -(-S; P))$$

$A \subseteq A''$ zachodzi we wszystkich kontekstach formalnych

wtedy i tylko wtedy, gdy

formuła $x[-P \cup -(-R; -(-S; P))]y$ jest tautologią RL_{FCA}

Reprezentacja własności kontekstu formalnego

Własność: $C \Rightarrow D$

P - zmienna relacyjna reprezentująca zbiór C

Q - zmienna relacyjna reprezentująca zbiór D

Term reprezentujący własność $C \Rightarrow D$

$$(-R; P) \cup -(-R; Q)$$

$C \Rightarrow D$ zachodzi we wszystkich kontekstach formalnych

wtedy i tylko wtedy, gdy

formuła $x[(-R; P) \cup -(-R; Q)]y$ jest tautologią RL_{FCA}

Systemy dedukcyjne

Aksjomatyczne systemy dedukcyjne

Formalizacje w stylu Hilberta [Frege, Russell, Heyting]:

- system: aksjomaty + jedna reguła
- dowód - skończony ciąg formuł

Systemy niehilbertowskie

- Gentzenowski rachunek sekwentów
- tablice analityczne - Beth 1955 i Hintikka 1955
  - Tableaux - Smullyan 1968 i Fitting 1990
  - diagramy - Rasiowa i Sikorski 1960

Tableaux w stylu Smullyan'a i diagramy Rasiowej-Sikorskiego są dualne.

Propozycja: dual tableaux

- System oparty na diagramach Rasiowej i Sikorskiego
- Reguły mają postać: $\dfrac{\Phi}{\Phi_1 \mid \ldots \mid \Phi_n}$
- ',' - alternatywa '$|$' - koniunkcja
- Reguły zachowują tautologiczność zbioru formuł, do których są stosowane
- Aksjomaty: pewne wyróżnione tautologiczne zbiory formuł
- Dowód: drzewo rozkładu
- dowodliwość formuły φ: istnienie domkniętego drzewa rozkładu.

Reguły

Reguły dekompozycji (przykłady):

$$(\cup)\quad \frac{x(R\cup S)y}{xRy\,,\,xSy} \qquad (-\cup)\quad \frac{x-(R\cup S)y}{x-Ry\mid x-Sy}$$

$$(;)\quad \frac{x(R;S)y}{xRz\,,\,x(R;S)y\mid zSy\,,\,x(R;S)y} \qquad (-;)\quad \frac{x-(R;S)y}{x-Rz\,,\,z-Sy}$$

z - dowolna zmienna $\qquad$ z - nowa zmienna

Reguły specyficzne, aksjomaty, pełność

Reguły specyficzne:

$$(R)\quad \frac{xRy}{ySx\,,\,xRy} \qquad (S)\quad \frac{xSy}{yRx\,,\,xSy}$$

Aksjomaty - wyróżnione zbiory formuł:

- $xTy\,,\,x-Ty$

Pełność:

Własność Φ zachodzi we wszystkich kontekstach formalnych

wtedy i tylko wtedy , gdy

$x\tau(\Phi)y$ jest $\mathrm{RL}_{\mathrm{FCA}}$-dowodliwa ($\tau(\Phi)$ relacyjna reprezentacja Φ)

Dowód własności $A \subseteq A''$

$$\underline{x[-P \cup -(-R; -(-S; P))]y}$$

$$\Big\downarrow (\cup)$$

$$x -Py, \underline{x -(-R; -(-S; P))y}$$

$$\Big\downarrow (-;) \text{ i } (-)$$

$$x -Py, xRz, \underline{z(-S; P)y}$$

$$(;)$$

$$\underline{xRz}, z -Sx \qquad\qquad x -Py, xPy$$

domknięte

$$\Big\downarrow (R)$$

$$zSx, z -Sx$$

domknięte

J.Golińska-Pilarek, E. Orłowska, *Relational Reasoning in Formal Concept Analysis*, w: Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, London, (2007), 1048-1053

B. Ganter, R. Wille, *Formal Concept Analysis*, Mathematical Foundations, Berlin, Springer, 1990.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ