

Andrzej Biłat

Dowód Aksjomatu Fregego (AF)

Aksjomat Fregego ma postać:

$$\text{AF} \quad (p \equiv q) \rightarrow (p = q)$$

(wszystkie zdania prawdziwe opisują tę samą sytuacją i wszystkie fałszywe – też). Dowód jest przeprowadzony na gruncie pewnego rozszerzenia systemu WT Suszki, zwanego tu – roboczo – „logiką faktyczności”. Przypomnijmy, że aksjomatyka WT składa się z a) tautologii prawdziwościowych TFT, b) aksjomatów dla spójnika identyczności ID (odpowiadających zwykłym aksjomatom dla predykatu identyczności) oraz c) specyficznego aksjomatu zdaniowej logiki z identycznością SCI:

$$\text{SCI} \quad p = q \rightarrow q \equiv p$$

(jeśli zdania A i B opisują tę samą sytuację, to mają tę samą wartość logiczną). Regułami dedukcji tej logiki są zwykle reguły logiki prawdziwościowej oraz specyficzna reguła QF (quasi-fregowska):

$$\text{QF} \quad \text{jeśli } \underline{A \equiv B} \text{ jest tezą WT, to } \underline{A = B} \text{ jest tezą WT.}$$

Reguła ta jest metalogicznym odpowiednikiem zasady a) (tj. zasady głoszącej, że zdania ściśle równoważne opisują tę samą sytuację).

System WT^W otrzymujemy przez rozszerzenie słownika języka logiki WT o spójnik jednoargumentowy W , przekształcenie QF do postaci reguły:

$$\text{QF}^W \quad \text{jeśli } \underline{A \equiv B} \text{ jest tezą } \text{WT}^W, \text{ to } \underline{A = B} \text{ jest tezą } \text{WT}^W,$$

przyjęcie pomocniczych definicji:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= p \vee \neg p, \\ \mathbf{0} &= p \wedge \neg p, \end{aligned}$$

a także przyjęcie wszystkich aksjomatów WT oraz dodatkowych aksjomatów:

$$\begin{aligned} \text{Ax1} & \quad p \rightarrow (Wp = \mathbf{1}) \\ \text{Ax2} & \quad \neg p \rightarrow (Wp = \mathbf{0}) \end{aligned}$$

Spójnik W można czytać „faktycznie”. Zgodnie z aksjomatami i) oraz ii), operacja odpowiadająca temu spójnikowi przyporządkowuje sytuacji p „sytuację maksymalną”, reprezentującą istnienie (faktyczność) p , gdy p jest faktem, oraz „sytuację minimalną”, reprezentującą nieistnienie (kontrafaktyczność) p , w przeciwnym razie.

Właściwy dowód aksjomatu Fregego zostanie poprzedzony dowodem lematu, głoszącego, że każda sytuacja jest identyczna ze swoim „kresem ontycznym” (tj. „sytuacją maksymalną” lub „sytuacją minimalną”).

LEMAT. $\mathbf{W}p = p$

DOWÓD.

- | | |
|--|----------------------|
| 1) $(\mathbf{W}p \wedge \neg p) \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{0})$ | Ax2, TFT |
| 2) $(\mathbf{W}p = \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{0})$ | SCI |
| 3) $(\mathbf{W}p \wedge \neg p) \rightarrow (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{0})$ | 1), 2), TFT |
| 4) $(\mathbf{W}p \equiv \mathbf{0}) \equiv \neg \mathbf{W}p$ | TFT |
| 5) $(\mathbf{W}p \wedge \neg p) \rightarrow \neg \mathbf{W}p$ | 3), 4), TFT |
| 6) $\mathbf{W}p \rightarrow p$ | 5), TFT |
| 7) $p \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{1})$ | Ax1 |
| 8) $(\mathbf{W}p = \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{1})$ | SCI |
| 9) $p \rightarrow (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{1})$ | 7), 8), TFT |
| 10) $(\mathbf{W}p \equiv \mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{W}p$ | TFT |
| 11) $p \rightarrow \mathbf{W}p$ | 9), 10), TFT |
| 12) $\mathbf{W}p \equiv p$ | 6), 11), TFT |
| 13) $\mathbf{W}p = p$ | 12), QF ^W |

TWIERDZENIE (AKSJOMAT FREGEGO)

$$(p \equiv q) \rightarrow (p = q)$$

DOWÓD.

- | | |
|---|---------------|
| 1) $p \wedge q \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{1}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{1})$ | Ax1, TFT |
| 2) $(\mathbf{W}p = \mathbf{1}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | ID |
| 3) $p \wedge q \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | 1), 2), TFT |
| 4) $p \wedge q \rightarrow (p = q)$ | 3), Lemat, ID |
| 5) $\neg p \wedge \neg q \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{0})$ | Ax2, TFT |
| 6) $(\mathbf{W}p = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | ID |
| 7) $\neg p \wedge \neg q \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | 5), 6), TFT |
| 8) $\neg p \wedge \neg q \rightarrow (p = q)$ | 7), Lemat, ID |
| 9) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p = q)$ | 4), 8), TFT |
| 10) $(p \equiv q) \rightarrow (p = q)$ | 9), TFT |

System $\mathbf{W}T^W$ jest dość naturalnym rozszerzeniem systemu $\mathbf{W}T$. Ten ostatni z kolei może być uważany (za taki był w szczególności uważany przez Suszkę) za jedną z filozoficznie dopuszczalnych, logicznych teorii sytuacji.¹ Podany dowód pokazuje, że tak rozszerzona teoria przekształca się w „dwusytuacyjny” system ontologii fregowskiej, który wszystkim zdaniom prawdziwym przyporządkowuje dokładnie jedną sytuację (istnienie), a więc – w system, który logiką sytuacji z pewnością już nie jest. W konsekwencji, spójnik \mathbf{W} nie może być zaliczony do stałych logiki nefregowskiej.

Rodzi to pytania ogólniejszej natury: jakie jest ogólne kryterium bycia stałą logiki nefregowskiej? W szczególności, dlaczego spójnik identyczności może być zaliczony do zbioru tych stałych, w przeciwieństwie do spójnika \mathbf{W} ?

¹ Warto dodać, że podobne aksjomatyczne rozszerzenia logiki nefregowskiej były niekiedy przyjmowane przez Suszkę (zob. np. aksjomatyczne wprowadzenie pojęcia stanu rzeczy, podane w „Ontologii w Traktacie L. Wittgensteina”, w: tenże, *Wybór pism*, pod. Red. M. Omyły, Warszawa 1998, s. 210) i zwolenników stosowania tej logiki w analizie filozoficznej (zob. np. L. Koj, A. Modrzejewska, „Próbne ujęcie podstaw ewentyzmu”, *Studia metafizyczne*, t. II, TN KUL, Lublin 2002, s. 375-423).