**Andrzej Biłat**

# Dowód Aksjomatu Fregego (AF)

Aksjomat Fregego ma postać:

AF $(p \equiv q) \rightarrow (p = q)$

(wszystkie zdania prawdziwe opisują tę samą sytuacją i wszystkie fałszywe – też). Dowód jest przeprowadzony na gruncie pewnego rozszerzenia systemu WT Suszki, zwanego tu – roboczo – „logiką faktyczności”. Przypomnijmy, że aksjomatyka WT składa się z a) tautologii prawdziwościowych TFT, b) aksjomatów dla spójnika identyczności ID (odpowiadających zwykłym aksjomatom dla predykatu identyczności) oraz c) specyficznego aksjomatu zdaniowej logiki z identycznością SCI:

SCI $p = q \rightarrow q \equiv p$

(jeśli zdania A i B opisują tę samą sytuację, to mają tę samą wartość logiczną). Regułami dedukcji tej logiki są zwykłe reguły logiki prawdziwościowej oraz specyficzna reguła QF (quasi-fregowska):

QF jeśli $\underline{A \equiv B}$ jest tezą WT, to $\underline{A = B}$ jest tezą WT.

Reguła ta jest metalogicznym odpowiednikiem zasady a) (tj. zasady głoszącej, że zdania ścisle równoważne opisują tę samą sytuację).

System $WT^{\mathbf{W}}$ otrzymujemy przez rozszerzenie słownika języka logiki WT o spójnik jednoargumentowy **W**, przekształcenie QF do postaci reguły:

$QF^{\mathbf{W}}$ jeśli $\underline{A \equiv B}$ jest tezą $WT^{\mathbf{W}}$, to $\underline{A = B}$ jest tezą $WT^{\mathbf{W}}$,

przyjęcie pomocniczych definicji:

$$\mathbf{1} = p \vee \neg p,$$
$$\mathbf{0} = p \wedge \neg p,$$

a także przyjęcie wszystkich aksjomatów WT oraz dodatkowych aksjomatów:

Ax1 $p \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{1})$
Ax2 $\neg p \rightarrow (\mathbf{W}p = \mathbf{0})$

Spójnik **W** można czytać „faktycznie”. Zgodnie z aksjomatami i) oraz ii), operacja odpowiadająca temu spójnikowi przyporządkowuje sytuacji p „sytuację maksymalną”, reprezentującą istnienie (faktyczność) p, gdy p jest faktem, oraz „sytuację minimalną”, reprezentującą nieistnienie (kontrfaktyczność) p, w przeciwnym razie.

Właściwy dowód aksjomatu Fregego zostanie poprzedzony dowodem lematu, głoszącego, że każda sytuacja jest identyczna ze swoim „kresem ontycznym” (tj. „sytuacją maksymalną” lub „sytuacją minimalną”).

**L**EMAT. $\mathbf{W}p = p$

**D**OWÓD.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(\mathbf{W}p \wedge \neg p) \to (\mathbf{W}p = \mathbf{0})$ | Ax2, TFT |
| 2) | $(\mathbf{W}p = \mathbf{0}) \to (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{0})$ | SCI |
| 3) | $(\mathbf{W}p \wedge \neg p) \to (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{0})$ | 1), 2), TFT |
| 4) | $(\mathbf{W}p \equiv \mathbf{0}) \equiv \neg\, \mathbf{W}p$ | TFT |
| 5) | $(\mathbf{W}p \wedge \neg p) \to \neg\mathbf{W}p$ | 3), 4), TFT |
| 6) | $\mathbf{W}p \to p$ | 5), TFT |
| 7) | $p \to (\mathbf{W}p = \mathbf{1})$ | Ax1 |
| 8) | $(\mathbf{W}p = \mathbf{1}) \to (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{1})$ | SCI |
| 9) | $p \to (\mathbf{W}p \equiv \mathbf{1})$ | 7), 8), TFT |
| 10) | $(\mathbf{W}p \equiv \mathbf{1}) \to \mathbf{W}p$ | TFT |
| 11) | $p \to \mathbf{W}p$ | 9), 10), TFT |
| 12) | $\mathbf{W}p \equiv p$ | 6), 11), TFT |
| 13) | $\mathbf{W}p = p$ | 12), $QF^{\mathbf{W}}$ |

**T**WIERDZENIE (**A**KSJOMAT **F**REGEGO)

$$(p \equiv q) \to (p = q)$$

**D**OWÓD.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $p \wedge q \to (\mathbf{W}p = \mathbf{1}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{1})$ | Ax1, TFT |
| 2) | $(\mathbf{W}p = \mathbf{1}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{1}) \to (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | ID |
| 3) | $p \wedge q \to (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | 1), 2), TFT |
| 4) | $p \wedge q \to (p = q)$ | 3), Lemat, ID |
| 5) | $\neg p \wedge \neg q \to (\mathbf{W}p = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{0})$ | Ax2, TFT |
| 6) | $(\mathbf{W}p = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{W}q = \mathbf{0}) \to (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | ID |
| 7) | $\neg p \wedge \neg q \to (\mathbf{W}p = \mathbf{W}q)$ | 5), 6), TFT |
| 8) | $\neg p \wedge \neg q \to (p = q)$ | 7), Lemat, ID |
| 9) | $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \to (p = q)$ | 4), 8), TFT |
| 10) | $(p \equiv q) \to (p = q)$ | 9), TFT |

System $WT^{\mathbf{W}}$ jest dość naturalnym rozszerzeniem systemu WT. Ten ostatni z kolei może być uważany (za taki był w szczególności uważany przez Suszkę) za jedną z filozoficznie dopuszczalnych, logicznych teorii sytuacji.[1] Podany dowód pokazuje, że tak rozszerzona teoria przekształca się w „dwusytuacyjny" system ontologii fregowskiej, który wszystkim zdaniom prawdziwym przyporządkowuje dokładnie jedną sytuację (istnienie), a więc – w system, który logiką sytuacji z pewnością już nie jest. W konsekwencji, spójnik **W** nie może być zaliczony do stałych logiki niefregowskiej.

Rodzi to pytania ogólniejszej natury: jakie jest ogólne kryterium bycia stałą logiki niefregowskiej? W szczególności, dlaczego spójnik identyczności może być zaliczony do zbioru tych stałych, w przeciwieństwie do spójnika **W**?

[1] Warto dodać, że podobne aksjomatyczne rozszerzenia logiki niefregowskiej były niekiedy przyjmowane przez Suszkę (zob. np. aksjomatyczne wprowadzenie pojęcia stanu rzeczy, podane w „Ontologii w *Traktacie* L. Wittgensteina", w: tenże, *Wybór pism*, pod. Red. M. Omyły, Warszawa 1998, s. 210) i zwolenników stosowania tej logiki w analizie filozoficznej (zob. np. L. Koj, A. Modrzejewska, „Próbne ujęcie podstaw ewentyzmu", *Studia metafilozoficzne*, t. II, TN KUL, Lublin 2002, s. 375-423).